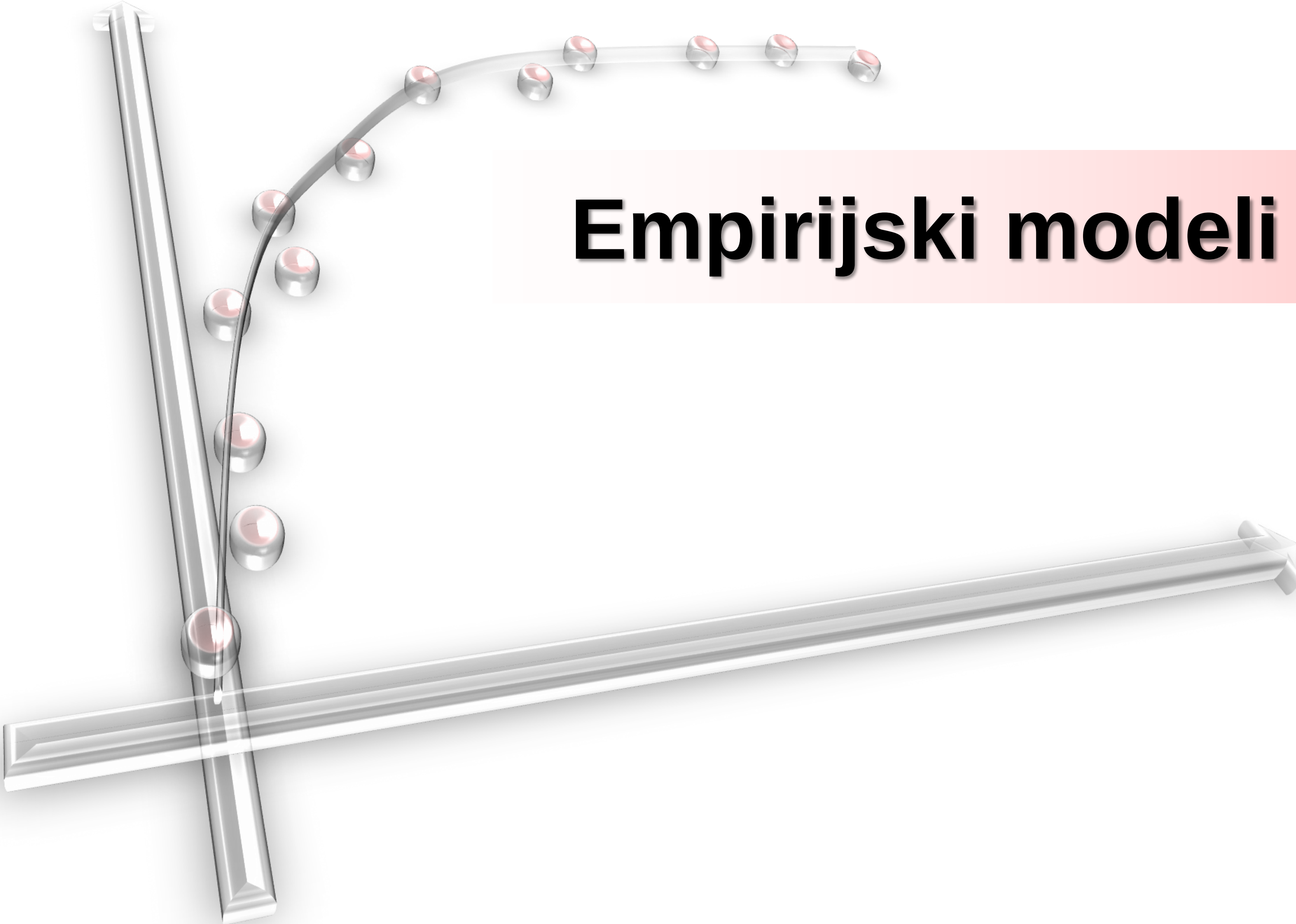
Empirijski modeli



0. Podaci

- dobiveni mjerenjem (x_i, y_i)
- grube pogreške se odbacuju
- sugeriraju model (na osnovu grafičkog prikaza pretpostavljamo oblik ovisnosti)
- služe za procjenu parametara
- testiraju model
- cilj: utvrditi analitički izraz koji povezuje podatke, odnosno model za analitičke i prediktivne svrhe

0. Definicija

- **Empirijski** se **model** zasniva samo na podacima i koristi se za predviđanje ponašanja sustava
- model se sastoji od funkcije koja se prilagođava podacima (engleski ‘fit’)
- graf funkcije samo približno prolazi kroz točke
- **nužni podaci**

0. Linearna regresija

- ucrtamo li parove izmjerenih veličina (x_i,y_i) i dobijemo približno točke na pravcu, postoji linearna ovisnost oblika $y=ax+b$ ili $y=ax$
- metodom najmanjih kvadrata (minimiziranje sume kvadrata pogreške) dobivamo parametre a i b
- možemo predvidjeti y vrijednosti tamo gdje nema mjerenja
- funkciju je važno ne primjenjivati izvan dosega modela

0. Zapis podataka

- srednja vrijednost veličina x_1, x_2, x_3, …, x_n

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = AVERAGE(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

- rezultate veličina zapisujemo u obliku

$$x = \overline{x} \pm \sigma_x$$

gdje je σ_x standardan devijacija aritmetičke sredine.

- primjer: http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e|search_for=elecmag_in!

1. Linearna regresija :: y=ax+b

- metodom najmanjih kvadrata dobivamo parametre a, b te pripadna odstupanja

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\overline{y^2} - \overline{y}^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} - a^2\right)}$$

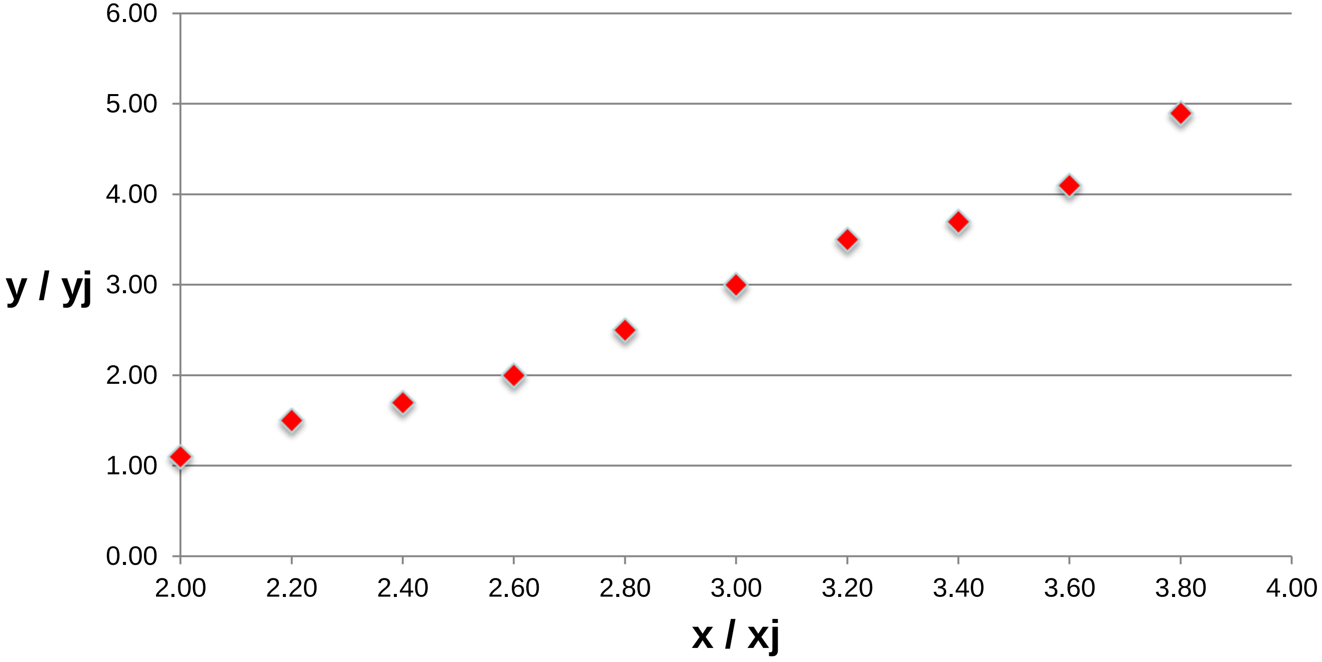
$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

1. Provjera ovisnosti :: y=ax+b

- primjer izmjerenih podataka

x/xj	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
y/yj	1.1	1.5	1.7	2.0	2.5	3.0	3.5	3.7	4.1	4.9

- grafički prikaz (provjera linearnosti)



1. Računanje parametara a i b

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	x_i	y_i	x_iy_i	formule u D	x_i^2	formule u F	y_i^2	formule u H
2	1	2,0	1,1	2,2	=B2*C2	4,0	=B2^2	1,2	=C2^2
3	2	2,2	1,5	3,3	=B3*C3	4,8	=B3^2	2,3	=C3^2
4	3	2,4	1,7	4,1	=B4*C4	5,8	=B4^2	2,9	=C4^2
5	4	2,6	2,0	5,2	=B5*C5	6,8	=B5^2	4,0	=C5^2
6	5	2,8	2,5	7,0	=B6*C6	7,8	=B6^2	6,3	=C6^2
7	6	3,0	3,0	9,0	=B7*C7	9,0	=B7^2	9,0	=C7^2
8	7	3,2	3,5	11,2	=B8*C8	10,2	=B8^2	12,3	=C8^2
9	8	3,4	3,7	12,6	=B9*C9	11,6	=B9^2	13,7	=C9^2
10	9	3,6	4,1	14,8	=B10*C10	13,0	=B10^2	16,8	=C10^2
11	10	3,8	4,9	18,6	=B11*C11	14,4	=B11^2	24,0	=C11^2
12									
13		Srednje vrijednosti gornjih podataka:							
14	n	x	y	xy		x^2		y^2	
15	10	2,90	2,80	8,79	=AVERAGE(D2:D11)	8,74	=AVERAGE(F2:F11)	9,24	=AVERAGE(H2:H11)
16									
17			a=	2,04	=(D15-B15*C15)/(F15-B15^2)				
18			σ_a=	0,08	=SQRT(1/A15*((H15-C15^2)/(F15-B15^2)-D17*D17))				
19			b=	-3,12	=C15-D17*B15				
20			σ_b=	0,04	=D18*SQRT(F14-B14^2)				
21									

$$a = (2.04 \pm 0.08)\ \mathrm{yj/xj}$$

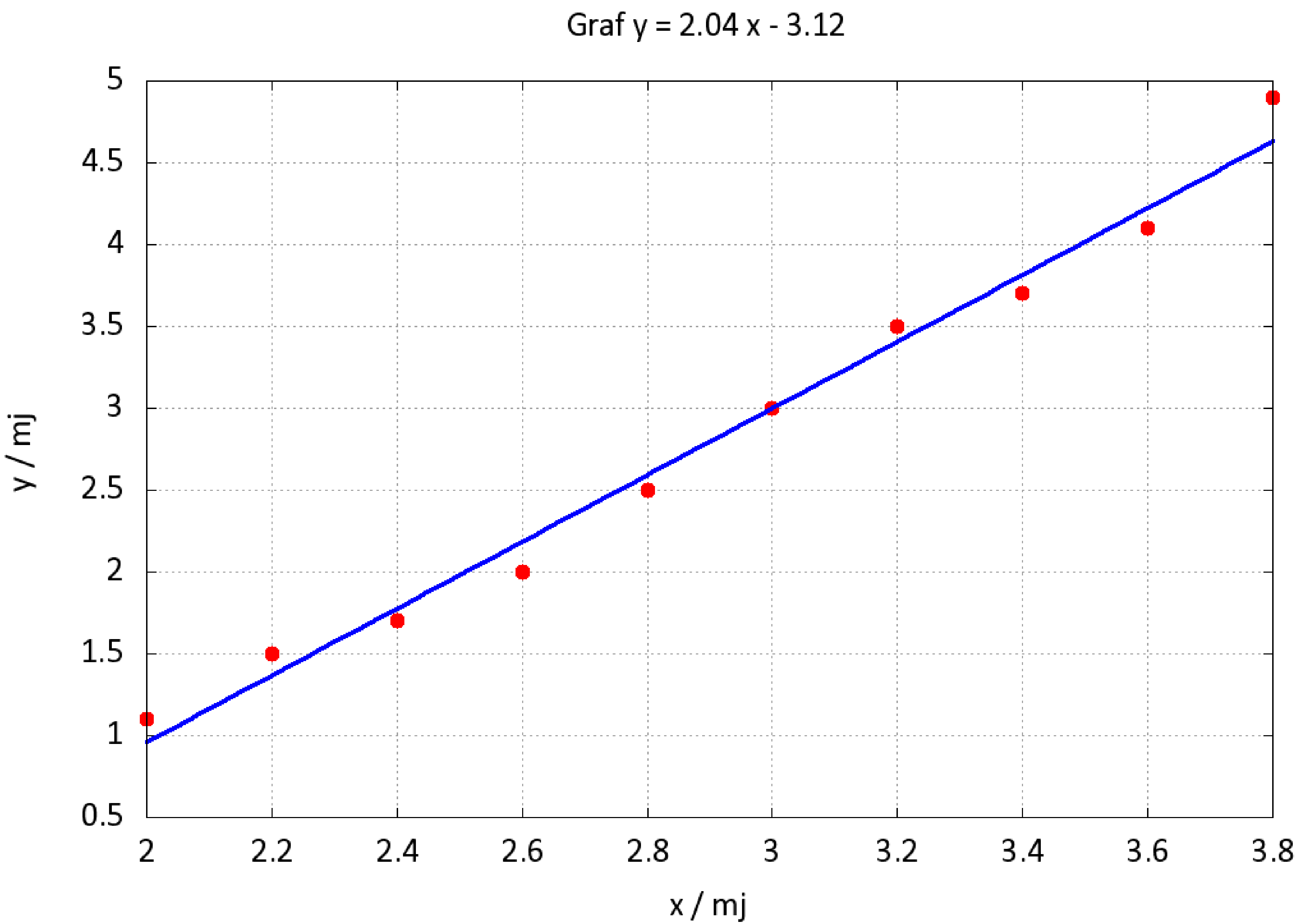
$$b = (-3.12 \pm 0.04)\ \mathrm{yj}$$

2. Grafički prikaz funkcije i podataka

- kopiramo podatke iz Excela u C:\tmp\podaci.dat (decimalna točka = **.**)
- Gnuplot – skripta za crtanje

  C:\tmp\graf.plt
- upišemo u Gnuplotu naredbe:

```
# pozivamo radni direktorij
cd 'C:\temp'
# ucitavamo naredbe iz datoteke
load 'graf.plt'
```



Graf y = 2.04 x - 3.12
y / mj
x / mj
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
2
2.2
2.4
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8

3. Linearna regresija :: y=ax

- metodom najmanjih kvadrata dobivamo parametar a te njegovu standardnu devijaciju

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2}} - a^2\right)}$$

4. Modeli koji se svode na y=ax+b

- logaritmiranjem potencije možemo svesti na linearnu funkciju

$$p = k \cdot s^a$$

$$\ln(p) = \ln(k) + a \cdot \ln(s)$$

- supstitucijom dobivamo linearni oblik y=ax+b

$$x = \ln(s) \qquad a = a$$

$$y = \ln(p) \qquad b = \ln(k)$$

5. Linearni fit pomoću Gnuplot-a

- umjesto računanja koeficijenata a i b korak po korak, možemo ih dobiti prilagodbom (fitanjem) funkcije f(x)=ax+b na poznate podatke
- Gnuplot naredbe: gnuplot_fit_podaci.plt

```
# proracun koeficijenata a i b fitanjem
f(x)=a*x+b
fit f(x) 'podaci.txt' u 1:2 via a, b
```

- rezultati prilagodbe: graf.log

6. Nelinearni fit

- za podatke koji ne ovise linearno jedni o drugima, moramo pretpostaviti oblik funkcijske ovisnosti ovisan o parametrima koje ćemo dobiti fitanjem
- Naredba za fitanje u Gnuplotu

fit f(x) 'dat_s_podacima' u 1:2 via parametri

- Naredba za fitanje u Mathematici

fitana=NonlinearModelFit[lista_podataka,f[x],{parametri},x]